Concursul Interjudeţean de Matematică "Gr. Moisil", ediţia a XX-a, Baia Mare, 2005

Enunţ. [clasa a VIII-a]
Fie $a > 0$. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^n\right)\left(1 + a^{n+1}\right) = (1 + a)\left(1 + a^2\right)\left(1 + a^4\right)\ldots\left(1 + a^{2^n}\right).$$

Soluţie.
1. Cazul $a = 1$ conduce la $2(n+1) = 2^{n+1}$ ceea ce revine la ecuaţia

(1) $$2^n = n + 1.$$

2. Cazul $a \neq 1$. Pe de o parte avem

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)(1 + a^{n+1}) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{2n+1} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a - 1},$$

iar pe de altă parte

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n}) = \frac{1}{1-a}(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n}) =$$
$$= \frac{1}{1-a}(1-a^4)(1+a^4)\ldots(1+a^{2^n}) = \cdots = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

Obţinem ecuaţia

$$\frac{a^{2n+2} - 1}{a - 1} = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a - 1}$$

care este echivalentă cu ecuaţia (1).

Deoarece, pentru orice $n \geqslant 2$ avem

$$2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} = n,$$

rezultă că

$$2^n > n + 1, \forall n \geqslant 2.$$

Deci ecuaţia $2^n = n + 1$ are doar soluţiile $n = 0$ şi $n = 1$.