Concursul Interjudeţean de Matematică "Gr. Moisil", ediţia a XX-a, Baia Mare, 2005

Enunţ. [clasa a IX-a]

Se consideră triunghiul ABC şi numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$. Fie B', C' mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$ şi punctele $M_n \in [BC]$, $N_n \in [BB']$ astfel încât $\overrightarrow{BM_n} = \frac{1}{2n}\overrightarrow{BC}$, respectiv $\overrightarrow{BN_n} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{BB'}$.

Să se arate că:

a) Punctele C', N_n, M_n sunt coliniare pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\overrightarrow{N_2M_2} + \overrightarrow{N_3M_3} + \ldots + \overrightarrow{N_nM_n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'N_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C'N_3} + \ldots + \frac{1}{n}\overrightarrow{C'N_n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

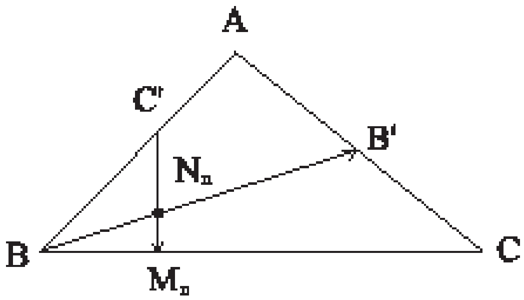
Soluţie.

a) Avem $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\overrightarrow{BM_n} = \frac{1}{2n}\overrightarrow{BC}$, de unde $\overrightarrow{BM_n} = \frac{1}{2n-1}\overrightarrow{M_nC}$.

De aici rezultă:

$$\overrightarrow{C'M_n} = \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BM_n} = \frac{1}{2n}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC'}.$$

Deoarece $\overrightarrow{C'N} = \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{BN_n} = \overrightarrow{C'B} + \frac{1}{n+1}\overrightarrow{BB'}$ şi $\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$, avem



$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'N_n} &= \overrightarrow{C'B} + \frac{1}{2(n+1)}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \overrightarrow{C'B} + \frac{1}{2(n+1)}(2\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \overrightarrow{BC'}\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2(n+1)}\overrightarrow{BC} = \\ &= \frac{-n}{n+1}\overrightarrow{BC'} + \frac{1}{2(n+1)}\overrightarrow{BC} = \\ &= \frac{n}{n+1}\left(-\overrightarrow{BC'} + \frac{1}{2n}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{C'M_n}.\end{aligned}$$

Din $\overrightarrow{C'N_n} = \frac{n}{n+1}\overrightarrow{C'M_n}$ rezultă coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{C'M_n}$ şi $\overrightarrow{C'N_n}$, deci şi a punctelor C', M_n şi N_n.

b) $\overrightarrow{N_nM_n} = \overrightarrow{N_nC'} + \overrightarrow{C'M_n} = \overrightarrow{N_nC'} + \frac{n+1}{n}\overrightarrow{C'N_n} = \overrightarrow{C'N_n}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n}\overrightarrow{C'N_n}$.

Prin însumare obţinem:

$$\overrightarrow{N_2M_2} + \overrightarrow{N_3M_3} + \cdots + \overrightarrow{N_nM_n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'N_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C'N_3} + \cdots + \frac{1}{n}\overrightarrow{C'N_n}.$$