Concursul Interjudeţean de Matematică "Gr. Moisil", ediţia a XXVI-a, Târgu Mureş, 2011

Enunţ. [clasa a VI-a]
Într-un triunghi ABC cu $\sphericalangle A > 90°$, se consideră bisectoarea AD, $D \in (BC)$. Perpendiculara dusă prin punctul D pe dreapta AC intersectează drepata AB în E, iar dreapta AC în G.
a) Demonstraţi că $AE \equiv AC$ dacă şi numai dacă $CE \| AD$.
b) Fie $F \in AB$ astfel încât $GF \| AD \| CE$. Demonstraţi că $CF \perp AB$.

Soluţie.

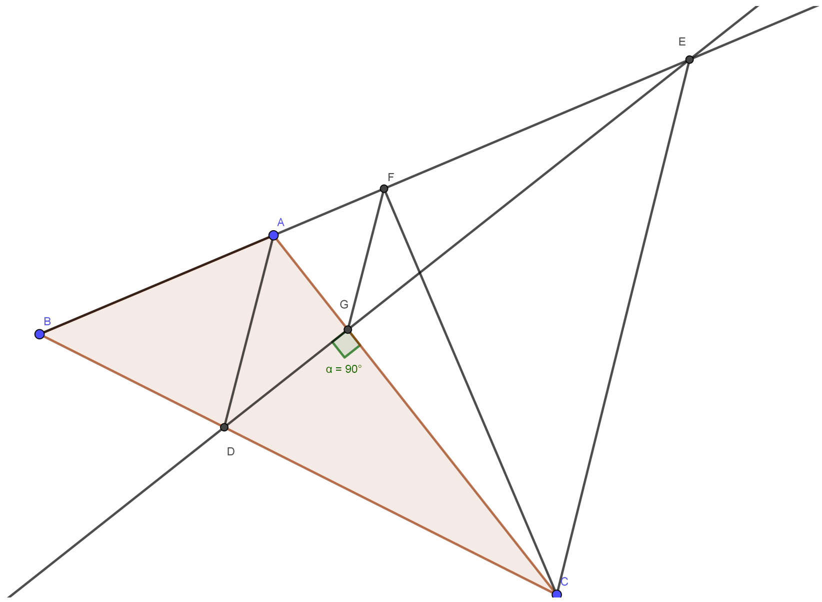

FIGURA 1.

a) Implicaţia directă. "$\Rightarrow$"
Considerăm $AM \perp CE$, cu $M \in CE$. Dacă $[AE] \equiv [AC]$, atunci $[AM]$ este înălţime în $\triangle EAC$, triunghi isoscel, deci $[AM$ este bisectoarea $\sphericalangle CAE$. Cum $[AD$ şi $[AM$ sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor suplementare $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle CAE$, rezultă că $m(\sphericalangle DAM) = 90°$.
Atunci $AM \perp AD$ şi $AM \perp CE$, deci $CE \| AD$.
Implicaţia inversă. "$\Leftarrow$"
Dacă $CE \| AD$, atunci au loc congruenţele $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BEC$, (dreapta BE este secantă), respectiv $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACE$, (dreapta AC este secantă).
Cum $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$, se obţine $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle ACE$, de unde rezultă că $\triangle AEC$ este isoscel, deci $[AE] \equiv [AC]$.
b) Ipoteza $CE \| AD \| FG$ implică, pe de o parte că $\triangle EAC$ este isoscel cu $[EA] \equiv [CA]$, iar pe de altă parte că $\triangle FAG \approx \triangle EAC$, deci $\triangle FAG$ este isoscel, cu $[FA] \equiv [GA]$. Pe baza criteriului de congruenţă L.U.L, rezultă $\triangle EAG \equiv \triangle CAF$. Atunci $m(\sphericalangle AGE) = m(\sphericalangle AFC) = 90°$, deci $CF \perp AB$.