Exemplul 1 – am2c5EX1[1]

Enunţ. Să se determine punctele de pe sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

în care funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

ia valori extreme.

Soluţie.

Vom considera funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

şi condiţia de legătură

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

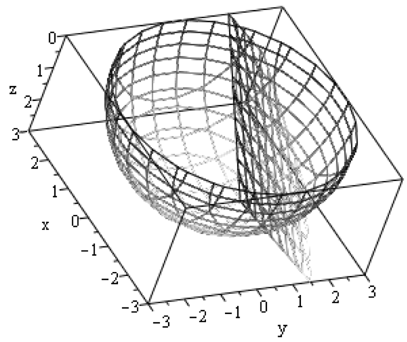

Figura 13. Reprezentarea grafică a funcţiilor
$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ şi $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$

Considerăm funcţia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, unde

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei L sunt

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 1+2x\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = -2+2y\lambda\quad \frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2+2z\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - 9.$$

Sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

[1]Enunţul problemei se găseşte aici.

devine $\begin{cases} 1+2x\lambda=0 \\ -2+2y\lambda=0 \\ 2+2z\lambda=0 \\ x^2+y^2+z^2-9=0 \end{cases}$ şi admite soluţiile

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-2 \\ \lambda=\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=2 \\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Astfel $\left(-1,2,-2,\dfrac{1}{2}\right)$ şi $\left(1,-2,2-\dfrac{1}{2}\right)$ sunt puncte staţionare pentru L.

Diferenţiala de ordinul al II-lea este dată de

$$\begin{aligned} d^2_{(x^0,y^0,z^0,\lambda)}L(h) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_1^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_2^2 \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_3^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_4^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_1h_2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_1h_3 \\ &+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_1h_4 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_2h_3 \\ &+ 2\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_2h_4 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial \lambda}(x^0,y^0,z^0,\lambda)h_3h_4 \end{aligned}$$

oricare ar fi $h=(h_1,h_2,h_3,h_4)\in\mathbb{R}^4$. Deoarece

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z,\lambda)=2\lambda; \qquad &&\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z,\lambda)=2\lambda; \\ &\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z,\lambda)=2\lambda; \qquad &&\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,z,\lambda)=0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,z,\lambda) = 0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(x,y,z,\lambda) = 0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x}(x,y,z,\lambda) = 2x$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}(x,y,z,\lambda) = 0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y}(x,y,z,\lambda) = 2y$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial z}(x,y,z,\lambda) = 2z,$$

se obţine

$$d^2_{(x,y,z,\lambda)} f(h) = 2\lambda \left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\right) + 4xh_1h_4 + 4yh_2h_4 + 4zh_3h_4.$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4$.

Pentru punctul staţionar $\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)$ avem

$$d^2_{\left(1,-2,2,-\frac{1}{2}\right)} L(h) = -h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 + 4h_1h_4 - 8h_2h_4 + 8h_3h_4,$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4$.

Pentru $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ diferenţiala de ordinul I în punctul $(1,-2,2)$ este

$$d_{(1,-2,2)} F(h) = 2h_1 - 4h_2 + 4h_3$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$. Se obţine $h_1 = 2(h_2 - h_3)$. Atunci

$$d_{\left(1,-2,2,-\frac{1}{2}\right)} L(h) = -5h_2^2 - 5h_3^2 + 8h_2h_3 = -h_2^2 - h_3^2 - 4\left(h_2 - h_3\right)^2 < 0$$

pentru orice $h_2, h_3 \in \mathbb{R}$.

Deci, forma pătratică $d_{\left(1,-2,2,-\frac{1}{2}\right)} L$ este negativ definită, ceea ce înseamnă că $(1,-2,2)$ este punct de maxim condiţionat pentru f. Valoarea maximă este

$$f_{\max} = f(1,-2,2) = 9.$$

Pentru punctul staţionar $\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)$ avem

$$d^2_{\left(-1,2,-2,\frac{1}{2}\right)} L(h) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - 4h_1h_4 + 8h_2h_4 - 8h_3h_4$$

oricare ar fi $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in \mathbb{R}^4$. Acum

$$d_{(-1,2,-2)} F(h) = 0$$

implică $h_1 = 2(h_2 - h_3)$. Atunci

$$d_{\left(-1,2,-2,\frac{1}{2}\right)}L(h) = 5h_2^2 + 5h_3^2 - 8h_2h_3 = h_2^2 + h_3^2 + 4\left(h_2 - h_3\right)^2$$

pentru orice $h_2, h_3 \in \mathbb{R}$.

Deci, forma pătratică $d_{\left(-1,2,-2,\frac{1}{2}\right)}L$ este pozitiv definită, ceea ce înseamnă că $(-1, 2, -2)$ este punct de minim condiţionat pentru f. Valoarea minimă este

$$f_{\min} = f(-1, 2, -2) = -9.$$