CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
06.05.2023
Clasa a X-a

Problema 3.

a) Arătați că $5 > \pi\sqrt[10]{3^3}$.

b) Fie x, y, z trei numere strict pozitive astfel încât $x + y + z = \pi$. Arătați că

$$\frac{1}{\pi^{\sin 2x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi^{\sin 2y}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^{\sin 2z}}} + \pi^{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z} > \pi.$$

Horvat-Marc Andrei

Soluție

a) Cum $625 = 5^4 > 2^9 = 512$, avem $5^{20} > 2^{45}$. Atunci $5^{20} > 2^{45} = 2^{40}\cdot 2^5 > 2^{40}\cdot 3^3$, deci

$$5^2 > 2^4\cdot\sqrt[10]{3^3}$$

de unde se obține

$$5 > \frac{2^4}{5}\cdot\sqrt[10]{3^3} = \frac{16}{5}\cdot\sqrt[10]{3^3} = \frac{32}{10}\cdot\sqrt[10]{3^3} = 3{,}2\cdot\sqrt[10]{3^3} > \pi\cdot\sqrt[10]{3^3}.$$

. . . . **(2p)**

b) Fie

$$S = \frac{1}{\pi^{\sin 2x}} + \frac{1}{\pi^{\sin 2y}} + \frac{1}{\pi^{\sin 2z}} + \pi^{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}.$$

Suma S se poate scrie sub forma echivalentă

$$S = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2y}{2}}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2z}{3}}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{-4\sin x\sin y\sin z}{4}}\right),$$

care este o sumă ce conține zece termeni. . . . . **(1p)**

Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a celor zece numere strict pozitive și se obține

$$S > 10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2y}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2z}{3}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{-4\sin x\sin y\sin z}{4}}\right)^4} =$$

$$= 10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}\cdot\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4}}$$

$$= 10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}\cdot\frac{1}{2^{10}\cdot 3^3}}$$

deci

$$S > \frac{5}{\sqrt[10]{3^3}}\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}}.$$

. . . . **(2p)**

Cum pentru $x + y + z = \pi$ are loc egalitatea $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4\sin x\sin y\sin z$, rezultă

$S > \frac{5}{\sqrt[10]{3^3}}$. . . . . **(1p)**

Din a) avem $\frac{5}{\sqrt[10]{3^3}} > \pi$, deci $S > \pi$. . . . . **(1p)**