Subiect de evaluare la Analiză Matematică I
26.01.2016

1. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq1}$ şi $(y_n)_{n\geq1}$ definite prin relaţiile de recurenţă

$$e\cdot x_n^2 = x_{n-1},\ n\geq 2$$

$$2y_n = \ln x_n + 1,\ n\geq 1,$$

unde $x_1 = e^2$. Determinaţi primii trei termeni ai şirului $(y_n)_{n\geq1}$.

2. Calculaţi limitele

$$L_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2.$$

$$L_2 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\right]$$

3. a) Calculaţi suma seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$.

b) Determinaţi natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

4. Determinaţi derivata de ordinul 4 a funcţiei $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ unde $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

5. Scrieţi dezvoltarea după puterile lui $X+1$ a polinomului $f = X^5 + X^3$.

6. Arătaţi că $x=0$ este punct de inflexiune pentru graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\cdot e^{x^2} - x - x^3$.

7. Arătaţi că pentru orice $x\in(-1,\infty)$ are loc inegalitatea

$$e^x \geq 1 + \ln(1+x).$$